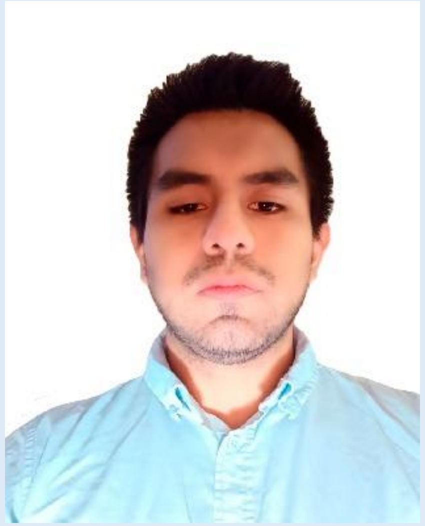

Profesor:
Ricardo Espino Lizama

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

DETERMINANTES

1. –Definición

*Sea una matriz **A** de orden **n**:*

$$A = [a_{ij}]_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

*se denomina **determinante de n – ésimo orden**, correspondiente a la **matriz A***

*a la suma algebraica de **n**! términos constituida de tal modo que que cada término de la suma*

es un producto de n – elementos de la matriz tomados uno de cada fila y de cada columna.

Además cada producto irá con signo más o menos dependiendo de la paridad de la sustitución que forma.

y la notación será

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ya hemos visto en la clase pasada, determinanes de 2do y 3er orden

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

ceg afh bdi aei bfg cdh

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$2. -$Los menores y sus complementos algebraicos

Sea la matriz A, se dice que el menor complementario del elemento a_{ij} es el determinante que se obtiene suprimiendo la $i-$ésima fila y la $j-$ésima columna

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

¿Cuál es elemento a_{23}? $\rightarrow a_{23} = 5$

¿Cuál es el menor complementario del elemento a_{23}?

$$\rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

Se define también al complemento algebraico A_{ij} de la siguiente forma:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

por ejemplo

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} \quad \rightarrow A_{23} = (-1)(-3) = 3$$

3. –Teorema de Laplace

Supongamos que en un determinante de orden n se ha elegido una fila o una columna entonces la suma de los productos de cada elemento de dicha fila o columna, por su complemento algebraico es igual a dicho determinante.

es decir:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

si elegimos a la fila 3

$$\det(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + \cdots + a_{3n}A_{3n}$$

en general, si elegimos a la fila i

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

lo mismo ocurre si elegimos una columna en lugar de una fila

Ejemplo:

Calcular los siguientes determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ \boxed{0 \quad 3 \quad -1} \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0.A_{21} + 3A_{22} - 1A_{23}$$

$$|A| = 0 + 3(-1)^4(-3) - 1(-1)^5(6) = -3$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & .1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 5.(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & .1 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^8 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 5.(-1) \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & .1 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^8 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 5.(-1)(-15) + 6(-1)^8(-14) = -9$$

Una técnica para conocer los signos de cada determinante consiste en colocar signos positivos en la diagonal principal y alternar signos en base a eso

$$\begin{vmatrix} + & & & \cdots & \\ & + & & \cdots & \\ & & + & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & + \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \cdots & \\ + & - & + & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & + \end{vmatrix}$$

Ejemplo: *Calcular*

$$|C| = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & .1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & .1 & 2 \end{vmatrix} = 7(7) - 9(-10) = 139$$

Sea $A = (a_{ij})_{4\times4}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i, & i>j \\ 1, & i=j \\ j, & i<j \end{cases}$

Calcular $|A|$

A) -97 B) -46 C) -21
D) -18 E) -9

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-1)(-8) + (-7)(15) = 8 - 105 = -97$$

$4.-$ *Propiedades de los determinantes*

$1.-$ *Un determinante no varía al transponerlo*

$\rightarrow$ *Todas las propiedad que se enunciarán se cumplen también para COLUMNAS*

$2.-$ *Si una fila de un determinante está constituida por ceros, entonces el determinante es cero*

$3.-$ *Al permutar una fila con otra, el determinante cambia de signo*

$4.-$ *Un determinante con dos filas iguales es* 0

$5.-$ *Si multiplicamos a todos los elementos de una fila por* K*, el determinante también queda multiplicado por* K

$6.-$ *Un determinante con dos filas proporcionales es igual a cero.*

$$7.- \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & & & \dots & \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 & \dots & b_n+c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & & & \dots & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & & & \dots & \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$8.-El\ determinante\ no\ varía\ si\ a\ los\ elementos\ de\ una\ fila\ se\ agregan\ los\ elementos\ de\ otra\ fila$

$9.-El\ determinante\ no\ varía\ si\ a\ los\ elementos\ de\ una\ fila\ se\ agregan\ los\ elementos\ de\ otra\ fila$
$multiplicados\ por\ un\ número$

$10.-\quad |AB| = |A||B|$

$11.-\quad |kA| = k^n|A|$

$12.-\quad Determinante\ de\ Vandermonde$

$13.-El\ determinante\ de\ una\ matriz\ antisimétrica\ de\ orden\ impar\ es\ 0$

$14.-El\ determinante\ de\ una\ matriz\ triangular\ superior\ o\ inferior\ es\ el$
$producto\ de\ los\ elementos\ de\ la\ diagonal\ principal$

1. De orden dos :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

2. De orden tres :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

3. De orden cuatro :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

en general:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

01.-

Calcular el valor de M definido por:

$$M=\sum_{i=1}^{n}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ i & i+1 & i+2\\ i & (i+1)^2 & (i+2)^2\end{pmatrix}$$

A) 0 B) 1 C) n
D) 2n E) 3n

$$M=\sum_{i=1}^{n}(-i^2+i-1)=-\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}1$$

$$M=\sum_{i=1}^{n}(-i^2+i-1)=-\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$Corrección$: a_{31} $no\ es\ i\ ,debería\ ser\ i^2$

$$M=\sum_{i=1}^{n}(1)(2)(1)=\sum_{i=1}^{n}(2)=2n$$

03.-

Sea A una matriz de orden 2 tal que $|A|=3$ y B es una matriz de orden 3x3 tal que $|B|=2$ entonces calcule $||A|B|+||B|A|$

A) 27 B) 54 C) 60
D) 66 E) 72

$$||A|B|+||B|A|$$

$$|3B|+|2A|$$

$$3^3|B|+2^2|A|$$

$$3^3(2)+2^2(3)=66$$

03.-

Sea A una matriz de orden 2 tal que $|A|=3$ y B es una matriz de orden 3x3 tal que $|B|=2$ entonces calcule

$$\big||A|B\big| + \big||B|A\big|$$

A) 27 B) 54 C) 60

D) 66 E) 72

$$\big||A|B\big| + \big||B|A\big|$$

$$|3B| + |2A|$$

$$3^3|B| + 2^2|A|$$

$$3^3(2) + 2^2(3) = 66$$

16.-

Calcular:

$$A=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

A) x^2+y^2 B) x^2y^2 C) 0

D) xy E) x^2-y^2

17.-

5. –Matriz Inversa

Dada una matriz cuadrada no singular A, si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden, tal que : $A \,.\, B = B \,.\, A = I$ (matriz identidad), entonces, definimos B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1}.

Teorema : Una matriz cuadrada tiene inversa, si y sólo si, es una matriz no singular; en tal caso se dice que la matriz es inversible.

Propiedades :

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y el escalar "K".

1. $A \,.\, A^{-1} = A^{-1} \,.\, A = I$
2. $(A \,.\, B)^{-1} = B^{-1} \,.\, A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(K \,.\, A)^{-1} = K^{-1} \,.\, A^{-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

6. −Cálculo de la matriz inversa

$Paso\ 1. -Reemplazamos\ cada\ elemento\ de\ la\ matriz\ por\ su\ complemento\ algebraico$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad Cofact(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$Paso\ 2. -Calculamos\ la\ matriz\ \boldsymbol{Adjunta\ de\ A},\quad la\ cual\ es\ la\ transpuesta\ de\ la\ matriz\ de\ cofactores$

$$Adj(A) = [Cofact(A)]^T$$

$$Finalmente \quad \boldsymbol{A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}}$$

$$Propiedad: \quad |Adj(A)| = |A|^{n-1}$$

Ejemplo:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Cofact(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = [Cofact(A)]^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Determine A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A) = -4$$

$$Cofact(A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[Cofact(A)]^T = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}}{\boldsymbol{-4}}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ *Solo operaciones con FILAS*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$7.-$*Polinomio Característico de una Matriz*

Sea una matriz cuadrada A *de orden* n

Se define al polinomio característico $\boldsymbol{P(\lambda)} = \mathbf{det}(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda I})$

Ejemplo: Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$ *de donde* $$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_\lambda(A) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$8.-$*Propiedades del polinomio característico*

$1.-$*El término independiente del polinomio característico es igual al* $\det(A)$

$2.-$*El término de grado* $\mathrm{n}-1$ *es siempre* $(-1)^{n-1}Traz(A)$

$3.-$*Si A es una matriz de 2x2 entonces* $P(\lambda) = \lambda^2 - \big(Traz(A)\big)\lambda + \det(A)$

$4.-$ *Si reemplazamos* $\lambda = A$ *en el polinomio característico, se obtiene la matriz nula*

$9.-$*Matrices Semejantes*

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, decimos que: A y B son matrices semejantes $\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible tal que $B = P^{-1}.A.P$.

$$A \; y \; B \; semejantes \Rightarrow p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$